Ce qu'il faut savoir sur les Intégrales

1. Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a,b]. On dit que F est une primitive de f sur [a,b] ssi quelque soit x de I :

$$F'(x) = f(x) \tag{1.1}$$

et pour une intégrale :

$$\int_a^b f(x).dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \tag{1.2}$$

2. Théorèmes

- Si F et G sont 2 primitives d'une même fonction f sur I alors, il existe une constante K réelle telle que pour tout x :

$$G(x) = F(x) + K \tag{2.1}$$

- Soit f une fonction continue sur I, et x_o un point de I, y_o un réel, il existe une et une seule primitive F de f sur I tel que $F(x_o) = y_o$. En fait on trouve K en fonction de x_o et y_o.

3. Primitives usuelles

Fonction	Primitive	Fonction	Primitive
f(x)=a	F(x)=ax + b	f(x)=cos(x)	F(x)=sin(x)+K
f(x)= (n-1).x^n	F(x)=x^{n+1}/n+1 K	f(x)=sin(x)	F(x)= - cos(x)+K
f(x)=1/x^2	F(x)= -1/x +K	f(x)=a^x(a0 et a1)	F(x)=a^x/Ln(a) + K
f(x)=cos(ax+b)	F(x)=a^{-1}sin(ax+b)+K	f(x)=Ln(x)	F(x)=x(Ln(x)-1)+K
f(x)=sin(ax+b)	F(x)= -a^{-1}cos(ax+b)+K	u^n.u'	u^{n+1}/n+1 + K
f(x)=1/$\cos^2$(x)=1+$\tan^2$(x)	F(x)=tan(x) +K	u'/u	Lnu+K
f(x)=1/x	F(x)=2x +K	u'/2u	u + K
f(x)=1/x	F(x) = Ln(x)+K	u'.e^u	e^u+K
f(x)=e^x	F(x)=e^x+K	e^u	e^u/u' +K vrai si u=ax+b, faux sinon

4. Propriétés

$$\int (f(x)+g(x)).dx = \int f(x).dx + \int g(x).dx \tag{4.1}$$

$$\int \lambda.f(x).dx = \lambda \int f(x).dx \tag{4.2}$$

$$\int_a^b f(x).dx = \int_a^c f(x).dx + \int_c^b f(x).dx \tag{4.3}$$

$$\text{Si } f \geq 0 \text{ et } a \leq b \text{ alors } \int_a^b f(x).dx \geq 0 \tag{4.4}$$

5. Intégration par partie

Soient u(t) et v(t) deux fonctions du temps t. On notera u et v ces fonctions et u' et v' leur dérivée par rapport au temps.

$$\int_a^b u'.v.dt = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'.dt \tag{5.1}$$

6. Changement de variable

Soit $t = \Psi(x)$, $\exists(\alpha;\beta) \in \Re^2 / \begin{cases} a = \Psi(\alpha) \\ b = \Psi(\beta) \end{cases}$ on peut alors utiliser le changement de variable :

$$\int_a^b f(t).dt = \int_\alpha^\beta f(\Psi(x)).\Psi'(x).dx \tag{5.2}$$