Les équations différentielles

1. Equations différentielles du premier ordre à coefficients constants

1.1. Définitions

Une équation différentielle linéaire du 1er ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$a.y'+b.y=R(x) \tag{1.}$$

où:

- a, b sont des constantes réelles, et $a \neq 0$.
- y est une fonction réelle de la variable réelle x (bien entendu, y et x peuvent être notées différemment, par exemple z et t).
- y' est la dérivée de y par rapport à x.
- R est une fonction donnée. Si la fonction R est nulle, c'est à dire si l'équation (1) s'écrit $a.y'+b.y=0$ alors cette équation est dite sans second membre (ou bien homogène). Une solution (ou intégrale) de l'équation (1) est une fonction réelle f, dérivable, telle que pour tout x : $a.f'(x)+b.f(x)=R(x)$.

Résoudre (on dit aussi intégrer) cette équation différentielle, c'est déterminer toutes ses solutions.

1.2. Equations sans second membre

Considérons l'équation sans second membre :

$$a.y'+b.y=0 \tag{2.}$$

<u>Calcul cavalier de la solution:</u>

$$a.y'=-b.y$$

$$\frac{y'}{y}=-\frac{b}{a}$$

D'où, en passant aux primitives :

$$\ln|y|=-\frac{b}{a}.x+K$$

où K est une constante réelle. D'où finalement :

$$|y|=e^{K}.e^{-\frac{b}{a}.x}$$

Ainsi on obtient comme solution générale de l'équation :

$$y=\lambda.e^{-\frac{b}{a}.x} \quad avec\ \lambda=\pm e^{K}$$

L'expression "solution générale" signifie que toute fonction obtenue en donnant à λ une valeur numérique particulière est une solution de l'équation, que l'on appelle d'ailleurs "solution particulière" et que, réciproquement, toute solution de l'équation est de ce type. En résumé, une solution particulière s'obtient en fixant la valeur de λ dans la solution générale et on obtient ainsi toutes les solutions de l'équation.

Remarque : Le calcul précédent est bien difficile à justifier, c'est pourquoi, il mérite bien son nom... Par exemple, nous avons divisé par y sans nous préoccuper de savoir si y pouvait s'annuler, nous avons évacué la valeur absolue sans beaucoup de précautions. Plutôt que de chercher à le justifier, nous allons vérifier que le résultat final est bien celui que l'on cherche:

Ainsi, notre calcul cavalier nous avait bien donné ce que nous avons appelé la solution générale. Pratiquement, c'est toujours ce calcul que l'on utilise pour retrouver le résultat.

Théorème 1 : La solution générale de l'équation :

$$a.y'+b.y=0$$

est

$$y=\lambda.e^{-\frac{b}{a}.x}.$$

1.3. Equations avec second membre

Nous allons voir maintenant comment, à partir d'une solution particulière de l'équation : $a.y'+b.y=R(x)$ on peut obtenir sa solution générale.

L'équation différentielle $a.y'+b.y=0$ est appelée l'équation sans 2ème membre associée à (1).
Soit y_1 une solution particulière de (1). Soit z une fonction quelconque.

Cherchons à quelle condition la fonction $y=y_1+z$ est solution de (1). Cette condition s'écrit :

$$a.(y_1'+z')+b.(y_1+z)=R(x)$$

Mais, y_1 étant une solution de (1), on a : $a.y_1'+b.y_1=R(x)$, donc la condition précédente est équivalente à :

$$a.z'+b.z=0$$

Ceci prouve que $y=y_1+z$ est solution de (1) si et seulement si z est solution de (2) (c'est-à-dire si $z=\lambda.e^{-\frac{b}{a}.x}$). D'où le théorème suivant.

Théorème 2 : La solution générale de l'équation : (1) $a.y'+b.y=R(x)$ est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre associée, et d'une solution particulière de l'équation (1).

2. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

Une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants est une équation de la forme :

$$a.y''+b.y'+c.y=R(x) \qquad (3.)$$

où:

- a, b et c sont des constantes réelles, et $a \neq 0$.
- y est une fonction réelle inconnue de la variable réelle x
- y' et y" sont ses dérivées première et seconde par rapport à x.
- R est une fonction donnée. Si la fonction R est nulle, c'est à dire si l'équation (3) s'écrit $a.y''+b.y'+c.y=0$ alors cette équation est dite sans second membre. Une solution (ou intégrale) de l'équation (3) est une fonction réelle f, deux fois dérivable, telle que pour tout x : $a.f''(x)+b.f'(x)+c.f(x)=R(x)$.

Résoudre (on dit aussi intégrer) cette équation différentielle, c'est déterminer toutes ses solutions.

2.1. Equations sans second membre (SSSM)

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à une équation linéaire sans second membre :

$$a.y''+b.y'+c.y=0 \tag{4.}$$

Définition : Deux fonctions y_1 et y_2 sont dites linéairement indépendantes si elles sont non proportionnelles, autrement dit si on n'a pas de relation de la forme $y_1=\alpha.y_2$ (ceci implique en particulier que ces deux fonctions sont non nulles).

On admettra que, si y_1 et y_2 sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (4), alors toute solution de (4) est de la forme $\lambda.y_1+\beta.y_2$. On dit alors que $\lambda.y_1+\beta.y_2$ est la solution générale de l'équation (4).
La solution générale de (4) est donc une fonction dépendant de deux paramètres réels arbitraires λ et β.

Théorème 3 : Un calcul très simple permet dans tous les cas d'obtenir la solution générale d'une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants sans second membre : (4) $a.y''+b.y'+c.y=0$

2.1.1. Recherche de solution dans C de (4)

Cherchons sous quelles conditions les fonctions $t \to e^{r.t}$, ou $r \in$ C, sont solutions de (4). Ces fonctions sont deux fois dérivables sur R. Elles sont solutions de (3) si et seulement si pour tout $t \in$ R on a :

$$y=e^{r.t} \quad ; \quad y'=r.e^{r.t} \quad ; \quad y''=r^2.e^{r.t}$$

d'où

$$a.r^2+b.r+c=0 \tag{5.}$$

2.1.2. Définition

On appelle équation caractéristique l'équation du 2ème degré (5)

$$a.r^2+b.r+c=0$$

Soit Δ son discriminant.

- Si Δ>0, l'équation (5) a deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, et la solution générale de (4) est :

$$y(x)=\lambda.e^{r_1.x}+\beta.e^{r_2.x}$$

- Si Δ=0, l'équation (5) a une racine double r et la solution générale de (4) est :

$$y(x)=(\lambda.x+\beta).e^{r.x}$$

- Si Δ<0, la solution générale de (4) est :

$$y(x)=(\lambda.\cos(A.x)+\beta.\sin(A.x)).e^{r.x}$$

2.2. Equations avec second membre (SP)

Considérons maintenant une équation avec 2ème membre :

$$a.y''+b.y'+c.y = R(x) \tag{6.}$$

Théorème 4 : la solution générale (SG) d'une équation différentielle linéaire du 2ème ordre à coefficients constants est obtenue en ajoutant à une solution particulière (SP) de cette équation à la solution générale de l'équation sans second membre associée (SSSM).

SG = SSSM + SP

Voici maintenant quelques "recettes" permettant d'obtenir dans les cas indiqués une solution particulière de l'équation (1).

2.2.1. R(x) est un polynôme de degré n

Dans ce cas on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme P(x) de degré

- n si $c \neq 0$,
- n +1 si $c = 0$ et $b \neq 0$,
- n + 2 si $c = b = 0$ et $a \neq 0$

2.2.2. R(x) est de la forme $Q(x).e^{\omega.x}$ où ω est un réel et Q un polynôme

En posant $y(x) = z(x).e^{\omega.x}$, on se ramène au cas précédent, en effet, on vérifie que la nouvelle fonction inconnue z vérifie une autre équation linéaire à coefficients constants dont le deuxième membre est Q.

Remarque : Le changement de fonction inconnue $y(x) = z(x).e^{\omega.x}$ permet toujours de se "débarrasser de l'exponentielle", c'est-à-dire de se ramener au cas d'un deuxième membre R pour une autre équation d'inconnue z.

2.2.3. R(x) est de la forme $(\lambda.\cos(A.x)+\beta.\sin(A.x)).e^{\omega.x}$ où $A \neq 0$

On cherche une solution particulière de la forme :

$y_1(x) = (\lambda.\cos(A.x)+\beta.\sin(A.x)).e^{\omega.x}$ si $\omega + i.A$ n'est pas racine de l'équation caractéristique.

$y_1(x) = (\lambda.\cos(A.x)+\beta.\sin(A.x)).x.e^{\omega.x}$ si $\omega + i.A$ est racine de l'équation caractéristique.

Attention : Même si R(x) ne contient que l'une des deux fonctions sin et cos, l'expression de y_1 doit contenir les deux.

2.2.4. R(x) est la somme de plusieurs fonctions R1(x), ... ,Rn(x)

Pour i = 1, 2, ..., n on cherche une solution particulière y_i de l'équation différentielle :

$$a.y''+b.y'+c.y = R_i(x)$$

La fonction $y_1 + y_2 + \ldots + y_n$ est alors une solution particulière de (3).

2.2.5. R(x) est de la forme $P(x).(\lambda.\cos(A.x)+\beta.\sin(A.x)).e^{\omega.x}$ où $A \neq 0$ et P est un polynôme

On sait, d'après d) qu'on a à chercher une solution particulière correspondant à chacun des deuxièmes membres $P(x).\lambda.\cos(A.x).e^{\omega.x}$ et $P(x).\beta.\sin(A.x).e^{\omega.x}$ et à les additionner. Or ces deuxièmes membres sont, aux coefficients λ et β près, respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $e^{\gamma.x}.P(x)$, où $\gamma = \omega + i.A$. Finalement on cherche une solution particulière complexe de $a.z''+b.z'+c.z = P(x).e^{\gamma.x}$, on prend la partie réelle (resp. imaginaire) de cette solution, on la multiplie par λ (resp. β), on additionne les deux et le problème est résolu.

3. Equations différentielles linéaires du premier ordre.

3.1. Définitions

On peut maintenant donner la définition générale d'une équation différentielle du premier ordre : c'est une relation H(y,y',x) = 0 entre une fonction y, sa dérivée et la variable x. La solution d'une telle équation dépend en général d'une constante arbitraire.
Vous connaissez déjà les équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants. Nous allons étudier des équations de la même forme, mais dans le cas plus général où les coefficients de y et y' sont des fonctions de x.
Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation de la forme

$$a(x).y'+b(x).y = R(x) \tag{7.}$$

où a, b et R sont des fonctions continues de x .

L'équation

$$a(x).y'+b(x).y = 0 \tag{8.}$$

est l'équation sans second membre associée à (7).

3.2. Equations sans second membre.

Considérons l'équation : (8) $a(x).y'+b(x).y = 0$.
On supposera, pour simplifier, que le coefficient a(x) ne s'annule pas. Si a(x) s'annule en certains points, on se borne en général à chercher les solutions de (8) qui sont définies sur un intervalle où a(x) ne s'annule pas. Dans ce cas les calculs qui suivent restent valables.

L'équation (8) s'écrit :

$$y'+\frac{b(x)}{a(x)}.y = 0$$

Une solution évidente de (8) est la fonction nulle, y =0 (car alors y' = 0).
Cherchons les autres solutions. Ces solutions ne s'annulent pas car on peut montrer (on l'admettra) que si une solution de (8) s'annule en un point, elle est partout nulle. On utilise alors la même méthode que pour une équation du premier ordre à coefficients constants.

Soit M(x) une primitive de $\frac{b(x)}{a(x)}$, qui est continue, donc a une primitive. L'équation précédente est équivalente à

$$Ln|y| = -M(x) + K$$

où K est une constante réelle arbitraire.

Ceci s'écrit aussi:
$|y| = e^{K}.e^{-M(x)} = \lambda.e^{-M(x)}$

où $\lambda = e^K$ est une constante réelle >0 quelconque (car tout nombre réel >0 peut s'écrire sous la forme e^K).

Ici, il y a une petite difficulté : on peut se demander s'il est possible que pour certaines valeurs de x on ait $y = \lambda.e^{-M(x)}$ et pour d'autres valeurs de x, $y = -\lambda.e^{-M(x)}$ (λ étant une constante >0 donnée). Si c'était le cas, la fonction y prendrait des valeurs positives et des valeurs négatives. Or y est dérivable, donc continue, et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, y s'annulerait en un point, ce qui est impossible car $e^{-M(x)}$ n'est jamais nul (d'ailleurs on a vu plus haut qu'une solution qui s'annule en un point est partout nulle).

Il en résulte que les solutions non nulles de (8) sont les fonctions de la forme $y = \lambda.e^{-M(x)}$, où λ est une constante réelle non nulle quelconque. Si on fait $\lambda = 0$ dans l'expression précédente, on obtient la solution y = 0. Donc :

Théorème 5 : La solution générale de l'équation : (8) $a(x).y'+b(x).y = 0$ est $y = \lambda.e^{-M(x)}$ où :
- λ est une constante réelle quelconque;
- M(x) est une primitive de $\dfrac{b(x)}{a(x)}$.

3.3. Equations avec second membre

Dans certains cas, on peut facilement trouver une solution particulière d'une équation avec 2ème membre :

$$a(x).y'+b(x).y = R(x)$$

Le théorème suivant (qui se démontre de la même manière que dans le cas des équations linéaires du 1er ordre à coefficients constants) permet alors de calculer la solution générale de (7).

Théorème 6 : La solution générale d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre avec 2ème membre est la somme de la solution générale de l'équation sans 2ème membre et d'une solution particulière de l'équation avec 2ème membre.

3.4. Méthode de la "Variation de la constante".

Nous allons maintenant décrire ici une méthode plus systématique pour trouver une solution particulière de :

$$a(x).y'+b(x).y = R(x) \quad (7)$$

On a vu que la solution générale de l'équation sans 2ème membre

$$a(x).y'+b(x).y = 0 \quad (8)$$

qui lui est associée est de la forme :

$$y = \lambda.e^{-M(x)}$$

On cherche alors une solution particulière de (7) sous la forme $y = \lambda(x).e^{-M(x)}$, c'est-à-dire que dans l'expression précédente, on remplace la constante λ par une fonction $\lambda(x)$ supposée dérivable.

On a alors :

$$y'(x) = \lambda'(x).e^{-M(x)} - \lambda(x).M'(x).e^{-M(x)}$$

Dans (7), remplaçons y et y' par ces expressions :

$$a(x).\left[\lambda'(x).e^{-M(x)} - \lambda(x).M'(x).e^{-M(x)}\right] + b(x).\lambda(x).e^{-M(x)} = R(x)$$

Or $e^{-M(x)}$ est solution de (8), donc :

$$a(x).\left[-M'(x).e^{-M(x)}\right]+b(x).e^{-M(x)}=0$$

L'équation obtenue s'écrit donc :

$$a(x).\lambda'(x).e^{-M(x)}=R(x)$$

Ou encore :

$$\lambda'(x)=\frac{R(x)}{a(x).e^{-M(x)}}$$

Donc , si u(x) est une primitive de $\frac{R(x)}{a(x).e^{-M(x)}}$, la fonction $y=u(x).e^{-M(x)}$ est une solution particulière de (7).

Théorème 7 : La solution générale de l'équation (7) $a(x).y'+b(x).y=R(x)$ est :

$$y=\left[u(x)+\lambda\right].e^{-M(x)}$$

où :

- M(x) est une primitive de $\frac{b(x)}{a(x)}$
- u(x) est une primitive de $\frac{R(x)}{a(x).e^{-M(x)}}$

Remarque : Les théorèmes 5) et 7) ne sont pas très faciles à retenir. Il est peut être préférable pour vous de retenir la méthode qui permet d'arriver à ces résultats, et de refaire dans chaque cas particulier les calculs précédents.

4. Equations différentielles du 1er ordre à variables séparées

4.1. Définition

Une équation différentielle est dite "à variables séparées" si elle peut se mettre sous la forme :

$$g(y).y'=f(x) \qquad (9.)$$

où f et g sont des fonctions continues.

Remarque : Une équation linéaire du premier ordre $a(x).y'+b(x).y=0$ est une équation à variables séparées (en supposant $a(x)\neq 0$ et $y\neq 0$).

4.2. Résolution

Soit G une primitive de la fonction g. Soit F une primitive de f.
Alors l'équation (9) est équivalente à :

$$G(y) = F(x) + C$$

où C est une constante réelle arbitraire. Cette relation entre x et y permet parfois de calculer y en fonction de x.

Théorème 8 : La solution générale d'une équation différentielle à variables séparées : $g(y).y'=f(x)$ est donnée par :

$$G(y) = F(x) + C$$

Où :

- G est une primitive de g
- F est une primitive de f
- C est une constante arbitraire

Ce cours est fortement inspiré de *http://handy.univ-lyon1.fr/service/cours/info_deug/deug.int/semestr.1/equadiff/equa.html*