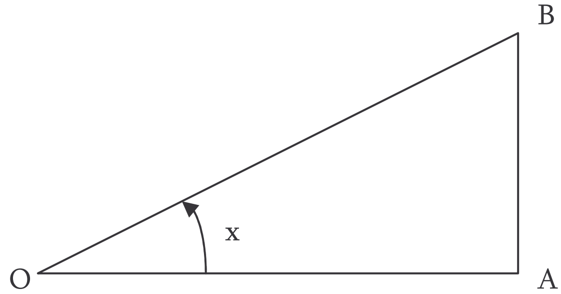
Le cercle trigonométrique

1. Introduction

Soit un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut 1 et l'angle orienté $x = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$.



$$|OB| = 1$$
$$x = (\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})$$

On peut calculer les longueurs OA et AB à partir de OB et x :

$$\cos(x) = \frac{OA}{OB} = OA$$
$$\sin(x) = \frac{AB}{OB} = AB$$
$$\tan(x) = \frac{AB}{OA} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Théorème de Pythagore :

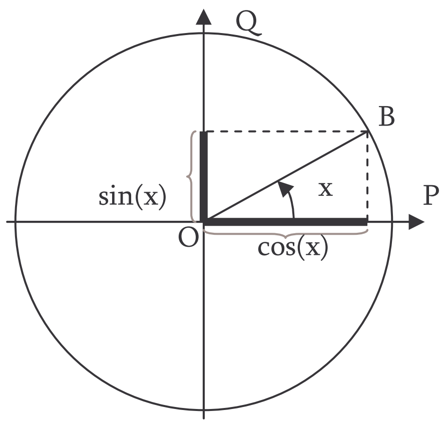
$$OA^2 + AB^2 = OB^2$$
$$OA^2 + AB^2 = 1$$
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

On vient de montrer une propriété trigonométrique très pratique pour les calculs.

Introduisons, à partir de ces résultats, le cercle trigonométrique.

2. Généralisation

Soit un cercle de centre O de rayon OB=1. Soit un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OQ})$.



En utilisant le premier paragraphe sur le triangle rectangle on en déduit que la projection du point B sur OP est le cosinus et que la projection de B sur OQ est le sinus, ceci quelque soit l'angle x (x est une mesure en radian de l'angle orienté).

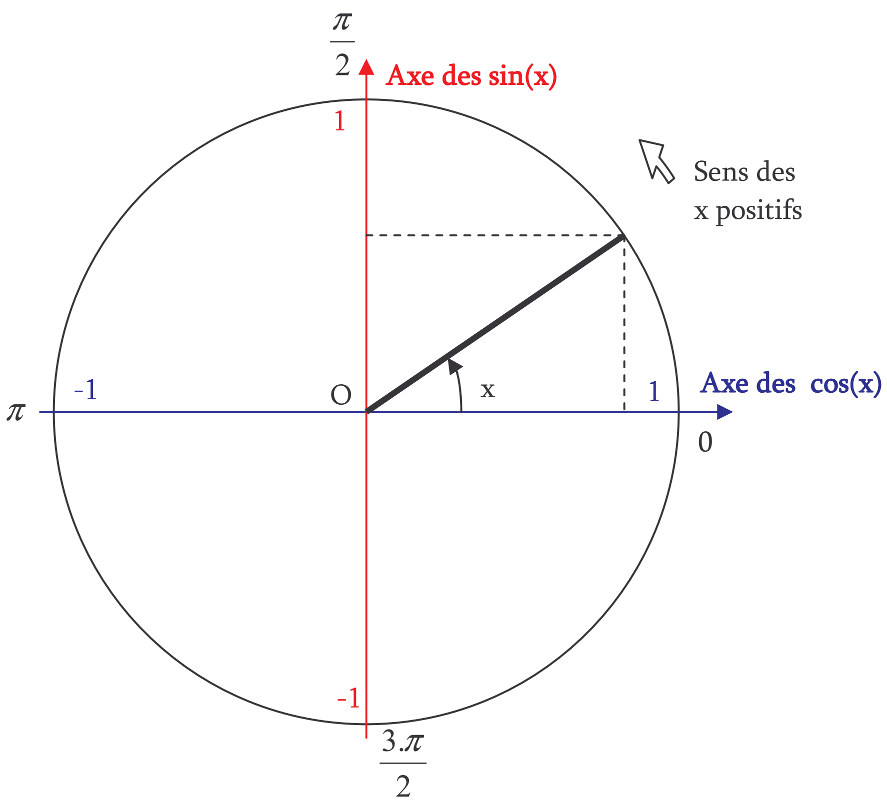
Définition : Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O de rayon 1 centré sur l'origine du repère. L'abscisse du point B est le cosinus, l'ordonnée du point B est le sinus. x augmente lorsque l'on tourne dans le sens anti-horaire.

En un tour, x varie de 0 à 2π. On démontre que si x est associé à un point B du cercle, x+ $2.k.\pi$ est associé au même point B pour tout entier relatif k.

On peut remarquer aussi que :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

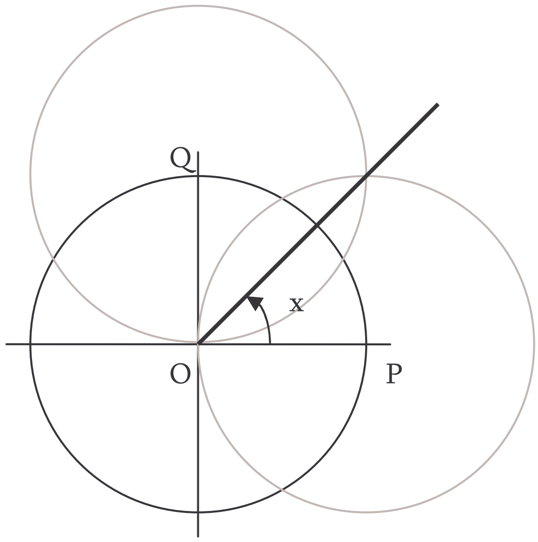
Le cercle trigonométrique est le suivant :



3. Valeurs remarquables

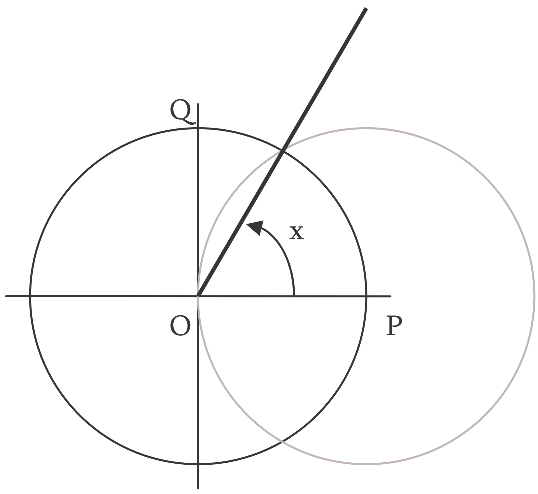
3.1. Construction de $\frac{\pi}{4}$

C'est la moitié de $\frac{\pi}{2}$. Il suffit de construire la bissectrice de $(\overrightarrow{OP};\overrightarrow{OQ})$:



3.2. Construction de $\frac{\pi}{3}$

La construction d'un triangle équilatéral permet d'obtenir 3 angles égaux de valeur $\frac{\pi}{3}$



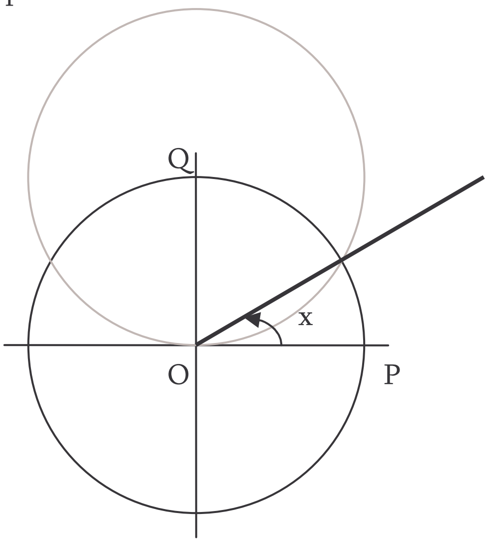
On sait que la hauteur d'un triangle équilatéral coupe le coté opposé en son milieu d'où :

$$\cos(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$$

3.3. Construction de $\frac{\pi}{6}$

On a deux solutions pour construire cet angle que l'on pourra démontrer aisément :

- Soit on fait la bissectrice de l'angle $\frac{\pi}{3}$
- Soit on prend la méthode précédente en construisant le cercle de centre Q et non pas de centre P.



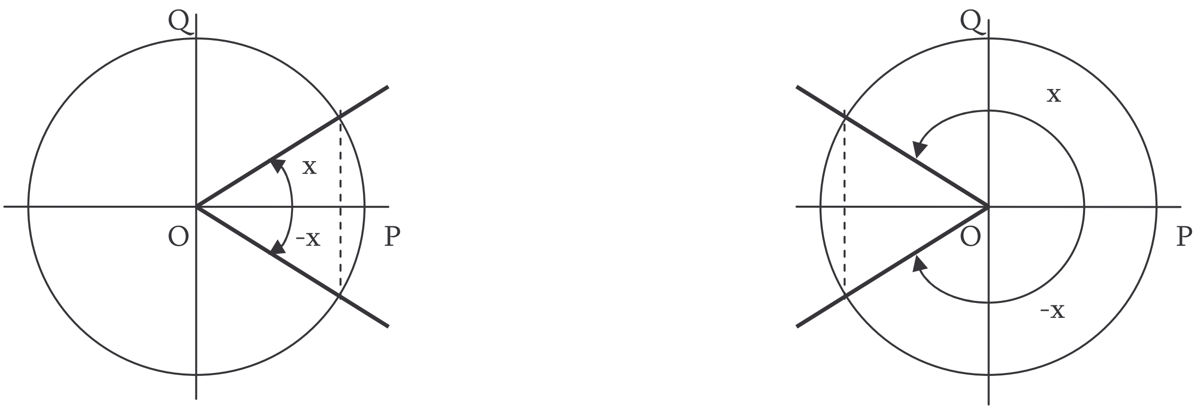
On obtient alors de la même manière que le cosinus :

$$\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

3.4. Symétrie du cercle trigonométrique

3.4.1. Cosinus

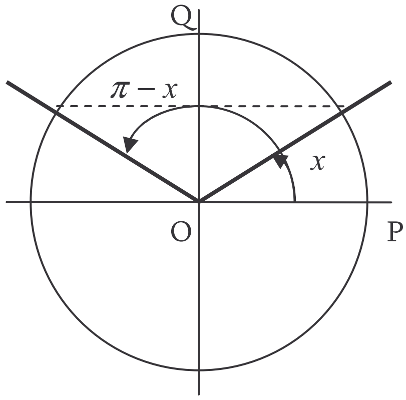
Le cosinus est l'abscisse du point B. On a donc correspondance entre x et –x pour les valeurs du cosinus.

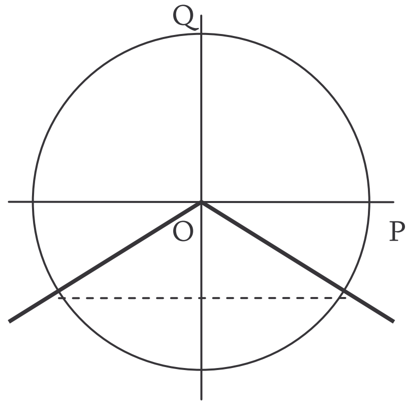


$$\cos(x) = \cos(-x)$$

3.4.2. Sinus

Le sinus est l'ordonnée du point B. On va obtenir également une symétrie par rapport aux ordonnées. Elles ne s'expriment pas de la manière que dans le cas du cosinus puisque il y aura égalité des sinus pour les valeurs x et $\pi - x$





$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

4. Synthèse du cours

4.1. Sur les valeurs

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
cos(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
sin(x)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan(x)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Indéfini

4.2. Sur les propriétés

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x)$$

5. Cercle trigonométrique à remplir

Compléter le cercle trigonométrique suivant dans les 4 cadrans avec les valeurs remarquables.