

# Modélisation des actions mécaniques

**Action mécanique** : Cause ayant pour effet de maintenir au repos, ou de modifier l'état d'un mécanisme.

**Modélisation** : Comme son nom l'indique, on utilise un modèle pour étudier le problème. Ce n'est donc pas la réalité mais seulement une interprétation de celle-ci sous certaines hypothèses simplificatrices.

## 1. Actions mécaniques

### 1.1. Définitions

Le terme « actions mécaniques » décrit une grande diversité de phénomènes.

Une action mécanique peut être :

- une action de contact (pression par exemple)
- une action à distance (poids, forces électriques et magnétiques,...)

Elle peut correspondre à :

- une force extérieur
- une force intérieur

Une action mécanique peut s'exercer :

- sur une surface (action d'un solide sur un autre au point de contact, pression d'un liquide, d'un gaz,...)
- sur un volume (poids par exemple).

### **Systeme materiel**

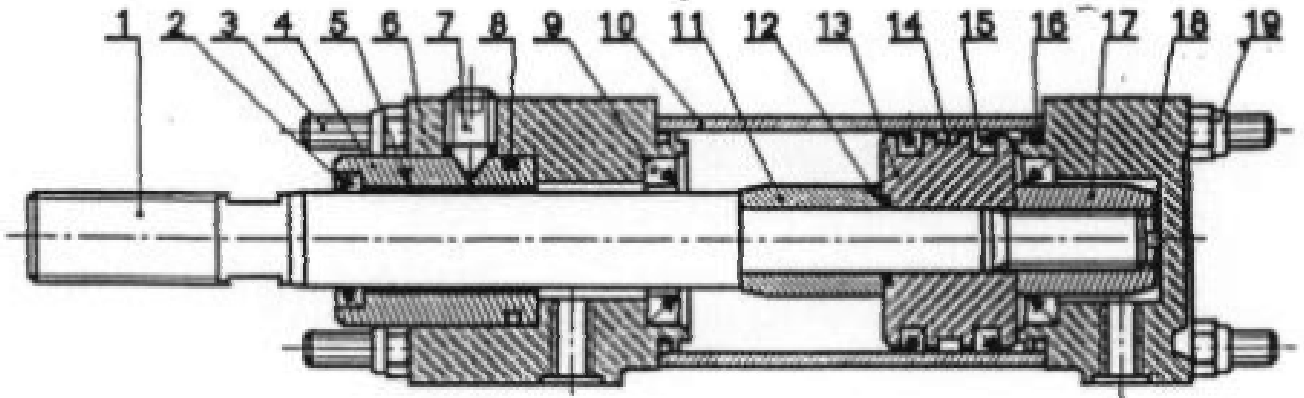
On appelle système matériel un ensemble constitué de solides et de fluides que l'on souhaite étudier.

### **Systeme isole**

Un système isolé, est un système matériel que l'on rend distinct de son environnement. Le système isolé peut être une pièce mécanique, un ensemble de pièces, une partie de pièce, un fluide.

L'isolement consiste à couper l'espace en deux parties disjointes afin de séparer, le système isolé (E) de son environnement ( $\bar{E}$ ). Suivant l'objectif de l'étude, on va choisir l'isolement le plus adapté.

### Exemple



- On cherche à dimensionner la tige du vérin : On isole {1}. L'effort de 13 sur 1 est un effort extérieur.
- On cherche à analyser le mouvement de translation de la tige par rapport au corps du vérin : On isole {1+11+12+13+14+15+17}. L'effort de 13 sur 1 est un effort intérieur.

## 1.2. Notion de force – Principe des actions mutuelles

### Force



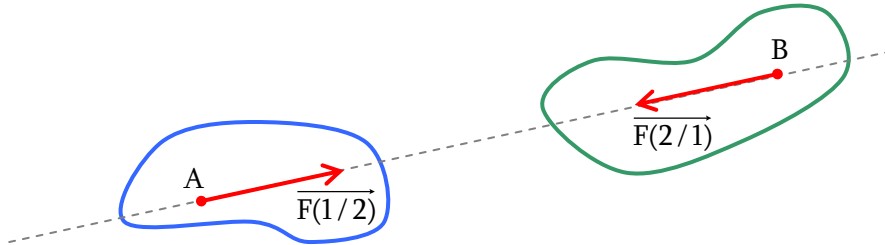
Analysons cette action mécanique particulière que l'indexe I applique sur le solide S au point A. On peut mettre en évidence les quatre éléments suivants :

- un point d'application A
- une droite d'action (D) ou direction (D)
- un sens, de I vers S
- une intensité

Ainsi cette action peut être représentée mathématiquement par un vecteur. L'intensité d'une force s'exprime en Newton (N).

### Principe des actions mutuelles

On peut le mettre en évidence par une expérience très simple à l'aide d'un aimant et d'un morceau d'acier. Plus généralement, soient deux particules élémentaires, pas nécessairement en contact (comme on vient de le voir).



Toute force implique l'existence d'une autre force qui lui est directement opposée. C'est le principe des actions mutuelles.

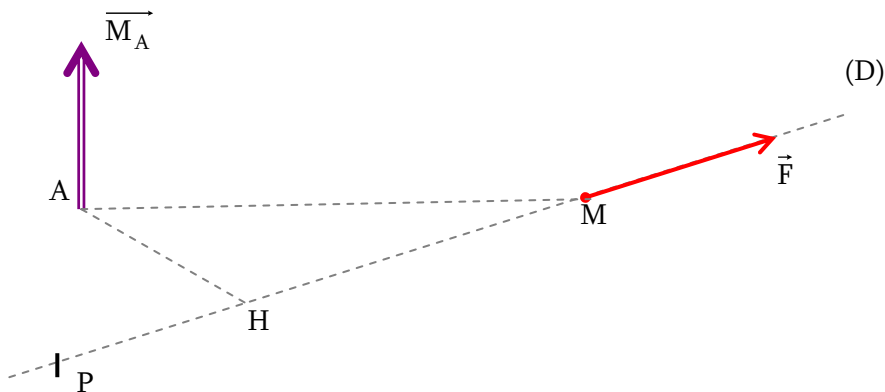
$$\overrightarrow{F(1/2)} = -\overrightarrow{F(2/1)}$$

### 1.3. Moment d'une force par rapport à un point

#### Définition

On appelle moment par rapport au point A de la force  $\vec{F}$  appliqué au point M, le bi-point d'origine A défini par la relation :

$$\overrightarrow{M((M, \vec{F}), A)} = \overrightarrow{M_{\vec{F}, A}} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$



#### Propriétés

Soit (D) le support de  $\vec{F}$ , on démontre que pour tout point P appartenant à (D) :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{AH} \wedge \vec{F}$$

D'où la norme du moment :

$$\|\vec{M}_{\vec{F},A}\| = \|\vec{F}\| \times \underbrace{\|\vec{AM}\| \times \sin(\overrightarrow{AM}, \vec{F})}_{d}$$

Soit :

$$\|\vec{M}_{\vec{F},A}\| = \|\vec{F}\| \times d$$

On appelle  $d$  le « bras de levier ».

### Cas de nullité

- Si (D) passe par A ( $d=0$ )
- Si  $\vec{F} = \vec{0}$

### Relation fondamentale

On cherche la relation entre un couple donné en un point A et un couple cherché en un point B.

Soit une force  $\vec{F}$  en M et deux points A et B. Par définition, on a :

$$\vec{M}_{\vec{F},A} = \vec{AM} \wedge \vec{F} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{\vec{F},B} = \vec{BM} \wedge \vec{F}$$

En utilisant la relation de Chasles  $\vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM}$ , on trouve :

$$\boxed{\vec{M}_{\vec{F},B} = \vec{M}_{\vec{F},A} + \vec{BA} \wedge \vec{F}}$$

On pourrait montrer, facilement, que ce champ est équiprojectif en multipliant de part et d'autre par  $\vec{BA}$  et en utilisant les propriétés du produit mixte (Vecteurs coplanaires).

## 1.4. Champ de force

L'action mécanique d'une force  $\vec{F}_{1/2}$  au point A est modélisable en tout point B lié (rigidement) au solide 2 par :

- une action  $\vec{R}_{1/2}$  équipollente à  $\vec{F}_{1/2}$  (champ uniforme sur 2)
- un moment  $\vec{M}_{B,1/2}$  tel que  $\vec{M}_{B,1/2} = \vec{BA} \wedge \vec{F}_{1/2}$  (champ de moment sur 2)

## 1.5. Torseur associé à une force

Le champ de moment étant équiprojectif, on peut modéliser une action mécanique par un torseur.

Soit une force  $\vec{F}_{1/2}$  au point A. Le torseur en tout point B lié (rigidement) au solide 2 s'écrit :

$$\{\mathbf{T}_{1/2}\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/2} = \vec{F}_{1/2} \\ \vec{M}_{B,1/2} = \vec{BA} \wedge \vec{F}_{1/2} \end{array} \right\}_B$$

## 1.6. Changement de centre de réduction

Il est souvent utile d'exprimer le torseur en un autre point.

Soit le torseur exprimé au point A :

$$\{\mathbf{T}_{1/2}\}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/2} \\ \vec{M}_{A,1/2} \end{array} \right\}_A$$

Il devient au point B :

$$\{\mathbf{T}_{1/2}\}_B = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1/2} \\ \vec{M}_{B,1/2} = \vec{M}_{A,1/2} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{1/2} \end{array} \right\}_B$$

### Cas particulier

Torseur couple (Résultante nulle) : les éléments de réduction du torseur couple sont les mêmes en tout point.

## 2. Action du milieu extérieur sur un système matériel

### 2.1. Notion de forces extérieures et forces intérieures

#### Forces extérieures

On appelle effort extérieur appliqué à un système matériel isolé, toutes les actions mécaniques agissant sur ce système, dont l'origine est à l'extérieur du système. Ces actions sont : soit des actions mécaniques de contact ; soit des actions à distances (gravité, champ magnétique, champ électrique...).

### Forces intérieures

Les efforts intérieurs sont les efforts qui s'exercent mutuellement sur les différentes parties du système isolé.

### Remarque

La notion d'efforts extérieurs et intérieurs ne dépend que de la frontière du système isolé. (Cf. Etude du vérin)

## 2.2. Actions mécaniques à distance

### Définitions

On dit qu'une action mécanique est à distance si il n'y a aucun contact physique entre les solides.

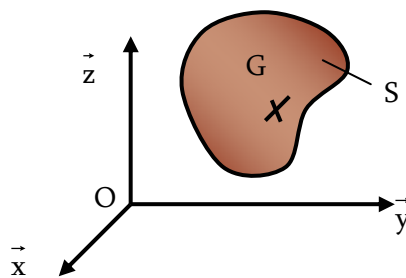
### Champ de pesanteur

C'est l'action mécanique de la terre sur un système matériel. L'action mécanique de pesanteur est répartie sur toutes les particules élémentaires du système. Ainsi, dans le cas de la **chute libre**, deux billes de matériaux différents lâchées d'une même altitude tomberont au sol au même moment ! (Sous certaines hypothèses : aérodynamique, frottement de l'air...)

### Centre de gravité d'un solide

On appelle centre de gravité (ou d'inertie) le barycentre G de toutes les particules élémentaires constituant le solide indéformable.

### Torseur de l'action mécanique de pesanteur dans le cas d'un solide homogène



Le torseur de l'action mécanique de pesanteur sur S est donné au centre de gravité G par :

$$\{T_{P/S}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -m \cdot g \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G$$

où  $m$  est la masse du solide homogène  $S$  et  $g$  est l'accélération de la pesanteur ( $g=9,81 \text{ m.s}^{-2}$  en moyenne au niveau de la mer). Il est intéressant de remarquer que l'accélération de la pesanteur prend des valeurs décroissantes quand l'altitude s'élève (à latitude et longitude données) et des valeurs croissantes quand augmente la latitude (à longitude et altitude données). De plus, elle varie avec la nature et la proximité des grandes masses solides formant le substrat terrestre : ainsi, la valeur de  $g$  à l'altitude zéro croît de 9,78 à 9,83  $\text{m.s}^{-2}$  environ lorsqu'on passe de l'équateur à l'un quelconque des pôles

### Autres actions mécaniques à distance

- Induction magnétique
- Forces électriques...

### 2.3. Actions mécaniques de contact

Il existe principalement deux types de contact :

- fluide / solide
- solide / solide

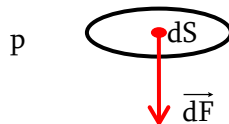
#### Contact fluide / solide

Dans le cas des fluides parfait, les forces de cohésion sont nulles. Les forces de contact sont alors perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

Pour les fluides réels, il y a apparition du phénomène de viscosité. Cependant, dans le cas de la statique des fluides, on revient au cas « fluide parfait » sinon le problème devient beaucoup plus complexe et ne rentre pas dans le cadre de notre étude.

#### Force de pression

Prenons un petit élément de surface  $dS$  soumis à une pression  $p$ . Le fluide exerce sur  $dS$  une force élémentaire  $\vec{dF}$  perpendiculaire à  $dS$ .



Par définition, on a :

$$p = \frac{\|\vec{dF}\|}{dS}$$

On peut parfois négliger la variation de pression. Exemple de la pression dans un vérin :

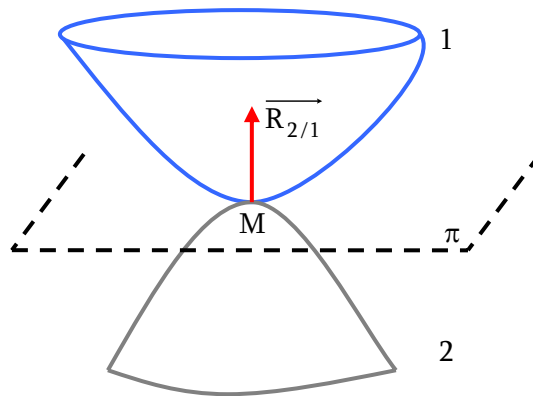


La pression dans le vérin vaut :

$$p = \frac{\|\vec{F}\|}{S} = \frac{\|\vec{F}\|}{\pi \cdot r^2}$$

### Contact parfait solide/solide

Le contact parfait signifie qu'il n'y a pas d'adhérence au contact. Dans ce cas là, la force de contact  $\vec{R}_{2/1}$  est perpendiculaire au plan tangent commun  $\pi$ .



Le torseur s'écrit au point M :

$$\{\mathbf{T}_{2/1}\}_M = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{2/1} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_M$$

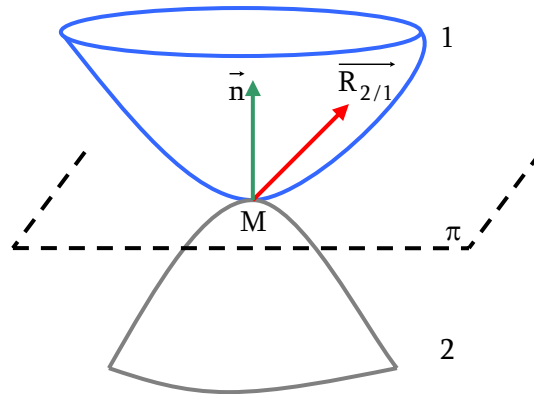
### Contact réel solide / solide

Le contact réel signifie qu'il y a adhérence ou frottement au contact.

On parle de frottement lorsque la vitesse de glissement (ou vitesse relative entre 1 et 2)  $\vec{V}(M \in 1/2)$  entre les solides 1 et 2 est non nulle.

On parle d'adhérence lorsque la vitesse de glissement  $\vec{V}(M \in 1/2)$  entre les solides 1 et 2 est nulle.

A ce moment là, la force de contact  $\vec{R}_{2/1}$  s'incline par rapport à la normale  $\vec{n}$  au plan tangent commun  $\pi$ .



Il existe plusieurs modèles pour décrire ces deux phénomènes. Celui de Coulomb est le plus adapté dans une première approche. Regardons sa définition dans le cas du frottement et de l'adhérence.

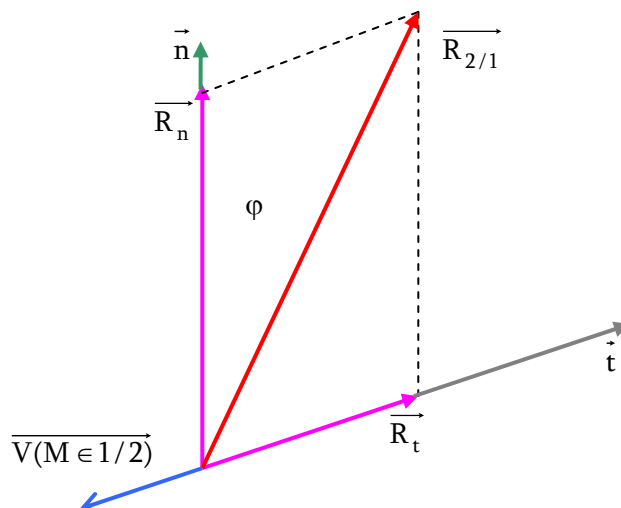
### Modèle de Coulomb dans le cas du frottement - $\overline{V(M \in 1/2)} \neq 0$

Le modèle de Coulomb indique :

- que l'effort de frottement (suivant  $\vec{t}$ ) est aligné avec la vitesse de glissement  $\overline{V(M \in 1/2)}$  (Direction)
- que l'effort de frottement (suivant  $\vec{t}$ ) s'oppose à la vitesse de glissement  $\overline{V(M \in 1/2)}$  et qu'il est donc opposé (Sens)
- que le rapport de l'effort de frottement sur la réaction normale est la tangente de l'angle de frottement  $\varphi$ , soit le coefficient de frottement de glissement  $f$

Soit le repère  $(M, \vec{n}, \vec{t}, \vec{b})$  tel que :

- $\vec{n}$  soit normal au plan tangent commun  $\pi$ .
- $\vec{t}$  est opposée à  $\overline{V(M \in 1/2)}$
- $\vec{b} = \vec{n} \wedge \vec{t}$



Le modèle de Coulomb ne fait intervenir que la nature des matériaux en contact. Il ne dépend pas de la vitesse relative au contact. On peut présenter ces résultats sous forme mathématique par le système d'équations suivant :

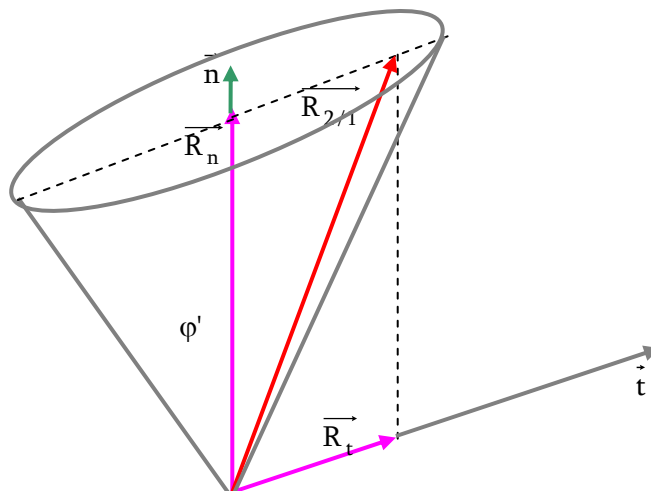
$$\left[ \begin{array}{l} \vec{t} \wedge \overrightarrow{V(M \in 1/2)} = \vec{0} \\ \vec{t} \cdot \overrightarrow{V(M \in 1/2)} < 0 \\ \frac{R_t}{R_n} = \tan \varphi = f \end{array} \right.$$

### Modèle de Coulomb dans le cas de l'adhérence - $\overrightarrow{V(M \in 1/2)} = 0$

Le modèle de Coulomb indique que le rapport de l'effort d'adhérence sur la réaction normale doit être inférieur à la tangente de l'angle d'adhérence  $\varphi'$ , soit le coefficient d'adhérence  $f'$ ,

Soit le repère  $(M, \vec{n}, \vec{t}, \vec{b})$  tel que :

- $\vec{n}$  soit normal au plan tangent commun  $\pi$ .
- $\vec{t}$  a une direction a priori inconnue



La réaction  $\overrightarrow{R_{2/1}}$  se situe dans ou sur le bord d'un cône d'angle au sommet  $\varphi'$ . On peut présenter ce résultat sous la forme mathématique :

$$\frac{R_t}{R_n} \leq \tan \varphi' = f'$$

Pour la plupart des matériaux et en particulier pour les métaux :

$$\varphi' \geq \varphi$$

Cette légère différence entre l'angle de frottement et l'angle d'adhérence donne naissance à des phénomènes de « stick slip ».

### Exemple de coefficient de frottement et adhérence

| Nature des matériaux en contact | $f'$<br>adhérence |          | $f$<br>frottement |             |
|---------------------------------|-------------------|----------|-------------------|-------------|
|                                 | à sec             | lubrifié | à sec             | lubrifié    |
| acier sur acier                 | 0.18              | 0.12     | 0.1               | 0.09        |
| acier sur fonte                 | 0.19              | 0.1      | 0.16              | 0.04 à 0.08 |
| acier sur bronze                | 0.11              | 0.1      | 0.1               | 0.09        |
| acier sur Téflon                | 0.04              |          | 0.04              |             |
| bronze sur fonte                |                   | 0.1      | 0.2               | 0.04 à 0.08 |
| acier sur Nylon                 |                   |          | 0.35              | 0.12        |
| bois sur bois                   | 0.65              | 0.2      | 0.2 à 0.4         | 0.04 à 0.16 |
| métal sur bois                  | 0.5 à 0.6         | 0.1      | 0.2 à 0.5         | 0.02 à 0.08 |
| métal sur glace                 |                   |          | 0.02              |             |
| pneu sur route                  | 0.8               |          | 0.6               | 0.1 à 0.3   |

Attention ! Dans le modèle de Coulomb, les coefficients  $f$  et  $f'$  ne dépendent que du couple de matériau en présence. Il n'y a aucune influence de la vitesse relative de 1 par rapport à 2.