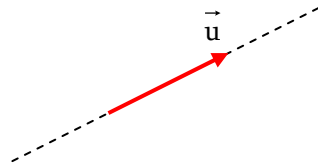


Vecteurs et Torseurs en Mécanique

1. Définitions & Propriétés

Un vecteur est un objet qui résume trois informations.

- Une direction (le support de la flèche)
- Un sens (l'orientation de la flèche)
- Une grandeur (la longueur de la flèche)



Un vecteur n'a pas de position précise dans l'espace, il est dit « libre ».

2. Addition

Propriété de l'addition de deux vecteurs :

- Commutativité : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativité : $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{v} + (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} + \vec{u} + \vec{w} = \dots$
- Possède un élément neutre : $\vec{u} = \vec{0}$
- Opération interne
- Chaque élément possède un inverse

3. Multiplication par un scalaire

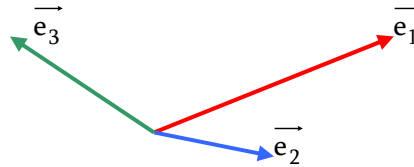
Le produit du vecteur \vec{u} par le scalaire k est le vecteur noté $k.\vec{u}$ et défini par :

- Si $k = 0$ alors $k.\vec{u} = \vec{0}$
- Si $k \neq 0$ alors le vecteur $k.\vec{u}$ a même direction que le vecteur \vec{u} . De plus si k est positif, il est de même sens que \vec{u} et si k est négatif, il est de sens contraire.

4. Bases et repère

Bases

Soient $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ trois vecteurs. Ils constituent une famille de vecteurs. Ces vecteurs constituent une base si et seulement si ils sont : ni nuls ni colinéaires deux à deux.

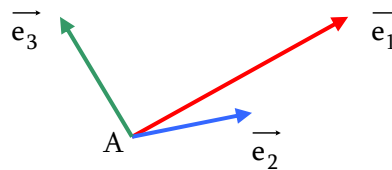


Repères

Un repère peut être défini comme un duo formé d'un point et d'une base. Par exemple :

$$(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$$

A est l'origine du repère, et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est la base associée à ce repère.



Repères particuliers

Il existe des repères particuliers :

- le repère orthogonal : la base est orthogonale, c'est-à-dire que les vecteurs de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont orthogonaux 2 à 2.
- le repère orthonormé : la base est orthogonale et les vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ont une norme égale à 1.

Dans l'ensemble de ce cours, le repère R_i sera généralement défini par $R_i : (O_i, \vec{x}_i, \vec{y}_i, \vec{z}_i)$

5. Opérations sur les vecteurs



Vous trouverez sur le site ci-dessous un applet complet permettant une visualisation du produit scalaire, du produit vectoriel et du produit mixte :

<http://www.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/divers/vecteurs.html>

5.1. Produit scalaire

Du point de vue fonctionnel, le produit scalaire est un procédé qui à deux vecteurs fait correspondre un réel. Algébriquement parlant, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique, définie et positive. Pratiquement, le produit scalaire a une vocation essentiellement géométrique.

Définition du produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

Sous cette forme, le produit scalaire est quelque chose de peu exploitable. Heureusement dans un repère orthonormé, la situation évolue favorablement.

Dans ce repère, on rappelle que la norme d'un vecteur \vec{u} de coordonnées (x, y, z) est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

On a donc

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2$$

On peut ainsi démontrer le théorème suivant.

Théorème

Si dans un repère orthonormé les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') alors leur produit scalaire est aussi donné par :

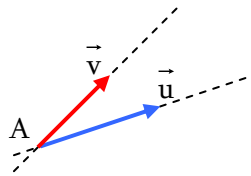
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x.x' + y.y' + z.z'$$

Remarque

Ce théorème est uniquement valable dans un repère orthonormé. Etre orthogonal ou simplement normé ne suffit pas. Les deux conditions sont requises.

Aspect géométrique du produit scalaire

Prenons deux vecteurs libres \vec{u} et \vec{v} non nuls. Où que soient leurs représentants, il est toujours possible de les ramener en un même point A.



On munit alors l'espace d'un repère orthonormé : par exemple $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ où \vec{e}_1 et \vec{u} ont la même direction et le même sens et $\vec{e}_2 \in (\vec{u}; \vec{v})$.

Dans ce repère, les coordonnées du vecteur \vec{u} sont $(\|\vec{u}\|; 0; 0)$ et les coordonnées du vecteur \vec{v} sont $(\|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}; \vec{v}); \|\vec{v}\| \cdot \sin(\vec{u}; \vec{v}); 0)$. Connaissant les coordonnées de \vec{u} et \vec{v} , on peut faire le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) + 0 \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}; \vec{v}) + 0 \times 0$$

Donc le produit scalaire des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est égal à :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

Cas particuliers

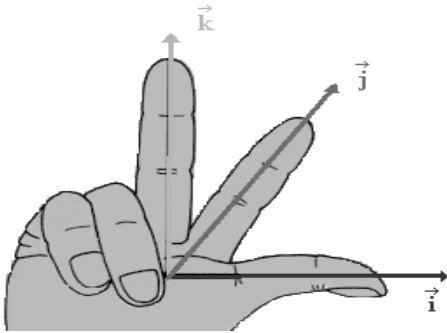
- Le produit scalaire de vecteurs colinéaires $\vec{u} \cdot \vec{v} = \pm \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ car $\cos(k.\pi) = \pm 1$ avec k entier
- Le produit scalaire de vecteurs orthogonaux $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ car $\cos(\frac{\pi}{2} + k.\pi) = 0$ avec k entier
- Le produit scalaire est nul si un des deux vecteurs est nul.

5.2. Produit vectoriel

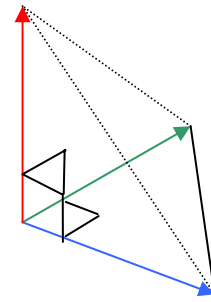
Orientation de l'espace : Règle de la main droite

Un trièdre direct s'obtient en plaçant dans l'ordre impératif suivant :

- le pouce suivant le premier vecteur \vec{i}
- l'index suivant le deuxième vecteur \vec{j}
- le majeur, plié à angle droit, donne le vecteur \vec{k}



Attention : Main droite



Trièdre trirectangle

Définition du produit vectoriel

On appelle produit vectoriel de \vec{u} par \vec{v} , le vecteur \vec{w} tel que :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

Le produit vectoriel de deux vecteurs donne un troisième vecteur pour lequel la direction, le sens et l'intensité sont parfaitement définis :

- direction : perpendiculaire au plan constituée par les deux vecteurs \vec{u} et \vec{v}
- sens : le trièdre constitué des trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} doit être direct
- intensité : C'est le produit des normes de chaque vecteur par la valeur absolue du sinus de l'angle entre les deux vecteurs, soit :

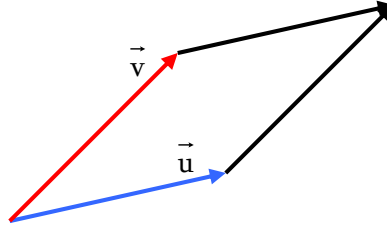
$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times |\sin(\vec{u}; \vec{v})|$$

Propriétés

- Le produit vectoriel est non commutatif.
- Le produit vectoriel est nul si un des vecteurs est nul ou si les directions sont parallèles.

Utilisation géométrique

Par exemple, l'aire d'un parallélogramme est la norme du produit scalaire $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$



Produit vectoriel dans une base orthonormée

Si dans un repère orthonormé les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont respectivement pour coordonnées (x, y, z) et (x', y', z') alors leur produit vectoriel est donné par :

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ y.z'-y'.z \\ z.x'-z'.x \\ x.y'-x'.y \end{vmatrix}$$

5.3. Produit mixte

Définition du produit mixte

On appelle produit mixte de trois vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , le réel défini par :

$$m = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$$

Propriétés

- Le produit mixte de vecteur non indépendant est nul.
- Le produit mixte est nul si un des vecteurs est nul ou si les directions sont coplanaires.

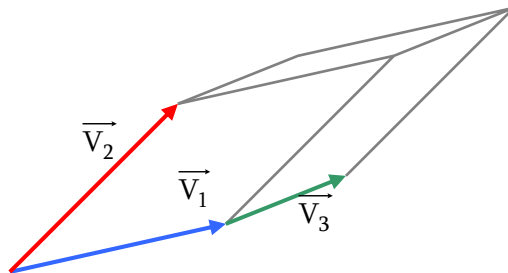
Le produit mixte autorise la permutation circulaire :

$$V = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$$

Utilisation géométrique

Par exemple, le volume d'un parallélépipède est le produit mixte :

$$V = (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1 = (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1) \cdot \vec{V}_2$$



6. Dérivation vecteur/temps

On considère un vecteur tel que : $\vec{u} = x(t).\vec{x} + y(t).\vec{y} + z(t).\vec{z}$ dont les composantes dans un repère orthonormé $R = (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ dépendent du temps. Les vecteurs de la base sont constants (invariants avec le temps).

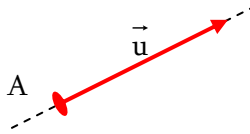
On définit la dérivée du vecteur \vec{u} par rapport au temps dans le repère R de la façon suivante :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right) = \frac{dx(t)}{dt}.\vec{x} + \frac{dy(t)}{dt}.\vec{y} + \frac{dz(t)}{dt}.\vec{z} = \dot{x}.\vec{x} + \dot{y}.\vec{y} + \dot{z}.\vec{z}$$

7. Vecteurs liés, Moments, Torseurs

7.1. Vecteurs liés

Un vecteur est dit liés, lorsqu'on associe un point à un vecteur. On peut donc le localiser de façon unique dans l'espace.

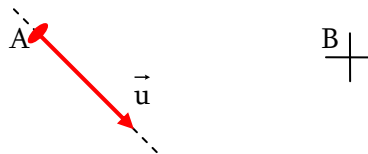


Par exemple, $\vec{u} = x(t).\vec{x} + y(t).\vec{y} + z(t).\vec{z}$ d'origine $A = (a, b, c)$ est un vecteur lié. On le note (A, \vec{u}) .

7.2. Moment d'un vecteur par rapport à un point

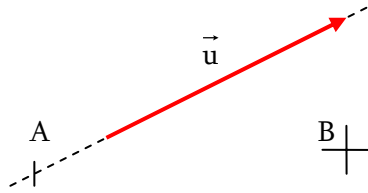
Un moment est une grandeur vectorielle liée à la description de la rotation d'un système. Par définition, on appelle moment du vecteur lié (A, \vec{u}) calculé en B le produit vectoriel :

$$\overline{M((A, \vec{u}), B)} = \overline{BA} \wedge \vec{u}$$



Vecteur glissant

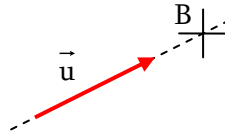
Si un vecteur lié n'a pas une localisation unique mais glisse sur une droite, on calcule le moment de ce vecteur en prenant un point A quelconque de la droite.



Propriétés

Le moment d'un vecteur lié est perpendiculaire au plan défini par \overrightarrow{BA} et \vec{u} .

Le moment est nul si un des vecteurs est nul ou si la droite support du vecteur passe par le point où l'on calcule le moment.



Changement de point

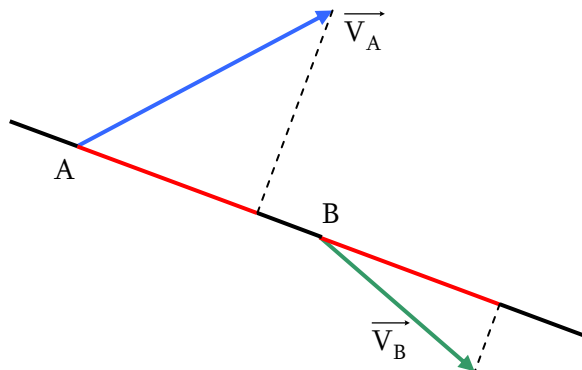
Pour connaître en C le moment d'un vecteur exprimé au point B alors on réalise un changement de point en utilisant la relation suivante :

$$\overline{M((A, \vec{u}), C)} = \overline{M((A, \vec{u}), B)} + \overrightarrow{CB} \wedge \vec{u}$$

7.3. Champs de vecteurs équiprojectifs

Le champ de vecteurs $\overrightarrow{V}_A, \overrightarrow{V}_B$ est dit équiprojectif s'il vérifie la condition :

$$\overrightarrow{V}_A \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V}_B \cdot \overrightarrow{AB}$$



7.4. Torseur

Définitions

Un torseur $[T]$ est un objet géométrique constitué de deux champs vectoriels :

- un champ uniforme \vec{R} (Vecteur libre)
- un champ équijectif $\overline{M(\vec{R}, C)} = \overline{M(\vec{R}, B)} + \overline{CB} \wedge \vec{u}$ (Vecteur lié)

Un torseur $[T]$ représente en tout point P de l'espace tous les ensemble de vecteurs équivalents ayant pour somme géométrique \vec{R} et pour moment $\overline{M(\vec{R}, P)}$.

$[T]$ est la classe d'équivalence de tous les ensembles de vecteurs liés ou glissants équivalents.

Il s'écrit :

$$\boxed{\{T\}_{C,R} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \overline{M(\vec{R}, C)} \end{array} \right\}_{C,R}}$$

Remarque

Lorsque l'on exprime les composantes des vecteurs \vec{R} et $\overline{M(\vec{R}, C)}$ dans un repère précis, on le note en bas à droite du torseur.

Torseurs particuliers

- le torseur nul : $\vec{R} = 0$ et $\overline{M(\vec{R}, P)} = 0$ (Nul en tout point)
- le torseur couple : $\vec{R} = 0$ et $\overline{M(\vec{R}, P)} \neq 0$ (Résultante nulle en tout point)
- le glisseur : $\vec{R} \neq 0$ et $\overline{M(\vec{R}, P)} = 0$ ou $\vec{R} \perp \overline{M(\vec{R}, P)}$

Tout torseur ordinaire peut être considéré comme la somme d'un glisseur et d'un couple.

Somme de deux torseurs

Pour faire la somme de deux torseurs il suffit d'ajouter les résultantes ensemble et les moments ensemble :

$$\{T_1\}_C + \{T_2\}_C = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \overline{M_1(\vec{R}_1, C) + M_2(\vec{R}_2, C)} \end{array} \right\}_C$$

Attention : Chaque torseur doit être exprimé au même point et la somme des composantes se fait dans le même repère.

Egalité de deux torseurs

Si deux torseurs sont égaux alors leurs résultantes sont égales et leur moment aussi :

$$\{T_1\}_C = \{T_2\}_C \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_1 \\ \overrightarrow{M_1(\vec{R}_1, C)} \end{array} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_2 \\ \overrightarrow{M_2(\vec{R}_2, C)} \end{array} \right\}_C$$

Attention : Chaque torseur doit être exprimé au même point et l'égalité des composantes se fait dans le même repère.

8. Mode de repérage

Pour simplifier les calculs, il est parfois intéressant de travailler dans un repère particulier. Pour cela, on définit un système de coordonnées. En général, on utilise un trièdre trirectangle direct (règle de la main droite) dans lequel les normes de chaque côté sont unitaires. Associé à un espace temps, ce système de coordonnées se nomme un repère. Un repère est un solide par rapport auquel le mécanicien étudie le mouvement, il est défini par 4 points non coplanaires.

Avant de choisir un repère il faut d'abord définir le référentiel de travail. Il en existe plusieurs :

- Le référentiel héliocentrique est un solide défini à partir du centre du soleil et de 3 autres étoiles.
- Le référentiel géocentrique est un solide défini à partir du centre de la Terre et de 3 étoiles.
- Le référentiel terrestre est un solide défini par 4 points non coplanaires de la Terre.

Ensuite, on associe un repère à au référentiel choisi. On distingue deux grands types de repères :

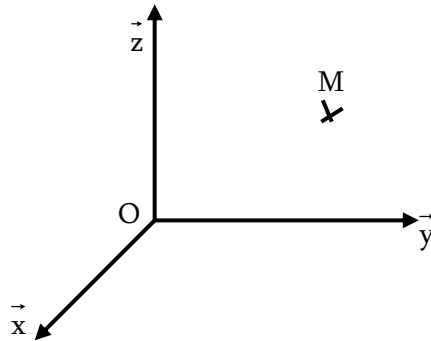
- Les repères fixes par rapport au référentiel choisi
- Les repères mobiles par rapport au référentiel choisi

Dans un repère tout point de l'espace sera défini par trois coordonnées. Soit un point M de l'espace et O le centre du repère considéré. On appelle $\overrightarrow{OM}(t)$ le vecteur position du point M à l'instant t dans ce repère.

Repère cartésien $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Le trièdre formé par les trois axes du repère cartésien est orthonormés directs. On définit un point fixe O ainsi que trois vecteurs unitaires $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On obtient le repère cartésien $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. $\overrightarrow{OM}(t)$ se définit donc par :

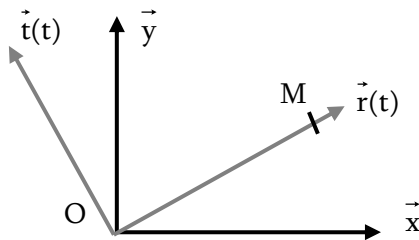
$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t).\vec{x} + y(t).\vec{y} + z(t).\vec{z}$$



Les trois paramètres de position sont : $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$

Repère polaire dans le plan $(O, \vec{r}(t), \vec{t}(t))$

Le mobile étant toujours dans le même plan il n'y a que deux paramètres de position à définir. Ces paramètres sont $r(t)$ et $\theta(t)$.

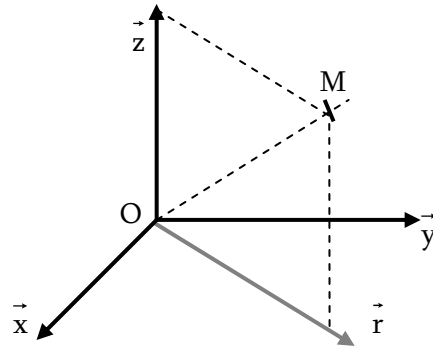


$\overrightarrow{OM}(t)$ se définit donc par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = r(t).\vec{r}(t) = r(t).\cos[\theta(t)].\vec{x} + r(t).\sin[\theta(t)].\vec{y}$$

Repérage cylindrique $(O, \vec{r}(t), \vec{\theta}(t), \vec{z})$

Dans le cas de mouvement de révolution il est intéressant d'utiliser ce type de repère $(O, \vec{r}, \vec{\theta}, \vec{z})$



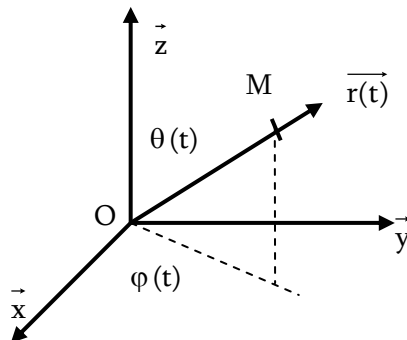
$\vec{OM}(t)$ se définit par :

$$\vec{OM}(t) = r(t) \cdot \vec{r}(t) + z_M(t) \cdot \vec{z} = r(t) \cdot \cos[\theta(t)] \cdot \vec{x} + r(t) \cdot \sin[\theta(t)] \cdot \vec{y} + z_M(t) \cdot \vec{z}$$

Les trois paramètres de position sont : $r(t)$, $\theta(t)$ et $z_M(t)$

Repérage sphérique $(O, \vec{r}(t), \vec{\theta}(t), \vec{\omega}(t))$

Lorsque le problème a une symétrie sphérique, il est souvent commode d'utiliser les coordonnées sphériques.



$\vec{OM}(t)$ se définit donc par :

$$\vec{OM}(t) = r(t) \cdot \vec{r}(t) = r(t) \cdot \sin[\theta(t)] \cdot \cos[\varphi(t)] \cdot \vec{x} + r(t) \cdot \sin[\theta(t)] \cdot \sin[\varphi(t)] \cdot \vec{y} + r(t) \cdot \cos[\theta(t)] \cdot \vec{z}$$

Les trois paramètres de position sont : $r(t)$, $\theta(t)$ et $\varphi(t)$

Ce paramétrage est utilisé pour la terre : azimute $\varphi(t)$; colatitude $\theta(t)$; latitude $\pi/2 - \theta(t)$...